

Motivos hipergeométricos

David P. Roberts
University of Minnesota, Morris
www.davidproberts.net

Novenas Jornadas de Teoría de Números
Logroño, España
29 Junio 2022

Esta presentación es una introducción al artículo *Hypergeometric Motives*, con Fernando Rodríguez Villegas, que fue publicado este mes en *Notices of the American Mathematical Society*.

Contexto general, y plan de la presentación

En la geometría aritmética, se quiere entender una variedad X arbitraria definida sobre \mathbb{Q} por medio de sus funciones L asociadas. Sea κ la dimensión de X . El caso $\kappa = 0$ es parte de la teoría de números. A medida que aumenta κ , los aspectos geométricos se hacen más difíciles.

La teoría de los motivos hipergeométricos trata sistemáticamente todos los casos donde X puede ser presentada por una sola ecuación que tiene $\kappa + 3$ términos y satisface una cierta condición leve de no degeneración.

La charla tendrá dos partes:

1. El caso relativamente bien conocido de las curvas, es decir, $\kappa = 1$
2. Dimensión general, ilustrada por un ejemplo con $\kappa = 13$

1. El caso de las curvas

Como ejemplo, sea X dada por

$$a_1x^2 + a_2xy^2 + a_3 + a_4x^3y = 0 \quad (1)$$

con los coeficientes $a_i \in \mathbb{Q}$. Aquí x e y recorren el conjunto \mathbb{C}^\times de números complejos no cero, para que $X \subset \mathbb{C}^{\times 2}$.

La tabla presenta los ingredientes de la ecuación, con los exponentes formando una matriz 2-por-4 $m = (m_{ij})$:

	Término ₁	Término ₂	Término ₃	Término ₄	
Exponente en x :	2	1	0	3	(2)
Exponente en y :	0	2	0	1	
Coefficientes:	a_1	a_2	a_3	a_4	

Parámetros γ y t

Una tabla como (2) determina un vector $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ de enteros distintos de cero que suman cero. El requisito principal es que γ sea ortogonal a los vectores de filas m_{1*} y m_{2*} . Se requiere también que $\gcd(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = 1$ y $\gamma_1 < 0$. En nuestro ejemplo, $\gamma = [-5, -2, 3, 4]$:

	Término ₁	Término ₂	Término ₃	Término ₄
γ :	-5	-2	3	4
Exponente en x :	2	1	0	3
Exponente en y :	0	2	0	1

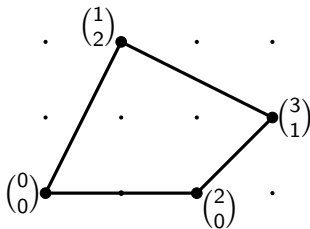
Hasta el isomorfismo, X depende solo de $t = \left(\frac{a_1}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1} \left(\frac{a_2}{\gamma_2}\right)^{\gamma_2} \left(\frac{a_3}{\gamma_3}\right)^{\gamma_3} \left(\frac{a_4}{\gamma_4}\right)^{\gamma_4}$ lo que nos permite restringir la atención a $X_{\gamma,t}$:

$$5^5 x^2 - 3^3 2^6 t x y^2 - 3^3 2^6 t + 5^5 x^3 y = 0. \quad (3)$$

γ es el *parámetro de familia* y $t \in \mathbb{Q} - \{0\}$ es el *punto de especialización*.

Invariantes se calculan por un polígono

El polígono de Newton Δ de la familia determinada por γ es el casco convexo de los vectores de columnas m_{*j} .



El género común g de las $X_{\gamma,t}$ para $t \neq 1$ es el número de puntos interiores de Δ ; aquí $g = 2$.

El número común de “puntos faltantes” de las $X_{\gamma,t}$ es el número de puntos en el perímetro de Δ ; aquí hay 5.

De hecho, un principio más general es que muchos de los invariantes de $X_{\gamma,t}$ se dan mediante fórmulas explícitas en los parámetros (γ, t) .

Funciones L en *Magma*

Magma ilustra un ejemplo dramático de este principio, ya que implementa **fórmulas** que dan **funciones L** :

```
Q := HypergeometricData([-5,-2,3,4*]);
```

```
L := LSeries(Q,1/9:Precision:=5);
```

```
Conductor(L);
```

48 600 000 (que es $2^6 3^5 5^5$)

```
Evaluate(L,1);
```

0.00000 (en 11.5 segundos)

```
Evaluate(L,1:Derivative:=1);
```

0.00000 (en 2.9 segundos)

```
Evaluate(L,1:Derivative:=2);
```

19.799 (en 4.7 segundos)

La siguiente lámina trata los puntos de especialización $1/9$, 1 , y 9 .

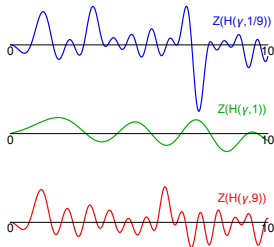
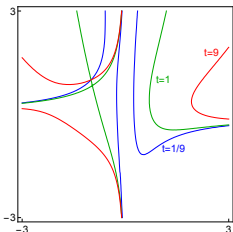
Resumen gráfico

Un parámetro de familia

Curvas $X_{[-5,-2,3,4],t}$ en el plano x - y , por $t = 1/9, 1, 9$

Sus funciones L normalizadas, en la línea crítica

$$\gamma = [-5, -2, 3, 4] \rightarrow$$



Se puede ver el punto doble que hace que $X_{\gamma,1}$ tenga género uno en lugar de dos. Los conductores son $48\,600\,000$, 255 , y $87\,480\,000$, lo que explica la menor densidad de ceros cuando $t = 1$.

2. Caso de dimensión κ arbitraria

Ahora consideremos una subvariedad del toro $\mathbb{C}^{\times(\kappa+1)}$ dada por

$$\sum_{j=1}^{\kappa+3} a_j \prod_{i=1}^{\kappa+1} x_j^{m_{ij}} = 0.$$

Podemos hacer más o menos lo mismo que hicimos para $\kappa = 1$. Siguiendo el modelo anterior,

1. Expresamos la ecuación en forma tabular y extraemos el parámetro de familia γ y el punto de especialización t .
2. Calculamos, para entender la geometría de $X_{\gamma,t}$, su vector

$$(h^{\kappa,0}, h^{\kappa-1,1}, \dots, h^{1,\kappa-1}, h^{0,\kappa})$$

de números de Hodge, generalizando el vector $(h^{1,0}, h^{0,1}) = (g, g)$ para curvas de género g . Siempre $h^{p,q} = h^{q,p}$. También, $h^{\kappa,0}$ se calcula como el número de puntos interiores del politopo Δ .

3. Escribimos en *Magma* para trabajar con funciones L , como antes.

Un ejemplo de dimensión $\kappa = 13$

1. Incluso podemos omitir la parte ecuacional del Paso 1 y simplemente comenzar con los parámetros (γ, t) .

Tomemos γ de modo que el único primo involucrado sea 2:

```
Q:=HypergeometricData(  
[*-8,-8,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,4,4,4,4,4*]);
```

Para t , tomemos **el punto singular 1**. La ventaja de esta elección de (γ, t) es que mantendrá el conductor pequeño, lo que permitirá que los cálculos analíticos sean rápidos.

2. El vector de Hodge es

$$(h^{13,0}, \dots, h^{0,13}) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Esto significa en particular que la parte esencial de la cohomología de $X_{\gamma,1}$ es una pieza de dimensión 10 en H^{13} . El resto de la cohomología se comporta de manera simple. ¡Estamos muy lejos de las curvas!

3. Aquí *Magma* no puede calcular la mala reducción en 2 por sí mismo. Pero podemos probar todas las posibilidades y elegir la única que funcione, usando un argumento opcional de *Magma*:

```
L := LSeries(Q,1:Precision:=5, BadPrimes:=  
  [<2,18,1 + 4*x + 96*x^2 + 512*x^3 + 16384*x^4>]);
```

Aquí el 18 viene del conductor $262\,144 = 2^{18}$. El polinomio da el factor local de la función L en 2.

Ahora procediendo como antes,

```
Evaluate(L,4);
```

0.00000 (en 3.28 segundos)

```
Evaluate(L,4:Derivative:=1);
```

0.57899 (en 0.57 segundos)

Las respuestas son rápidas porque el conductor es pequeño. ¡La función L es útil! El cero central sugiere un cierto ciclo de seis dimensiones en $X_{\gamma,1}$. Todos sus ceros gobiernan los aspectos muy refinados de los conteos de puntos $|X_{\gamma,1}(\mathbb{F}_q)|$. Etc.

Referencia

Nuestro artículo:

David P. Roberts and Fernando Rodríguez Villegas. *Hypergeometric Motives*. Notices of the American Mathematical Society. June/July 2022. 914–929.

Han habido muchos contribuyentes a la teoría de los motivos hipergeométricos. Las referencias en nuestro artículo dan muchos puntos de entrada a la literatura.